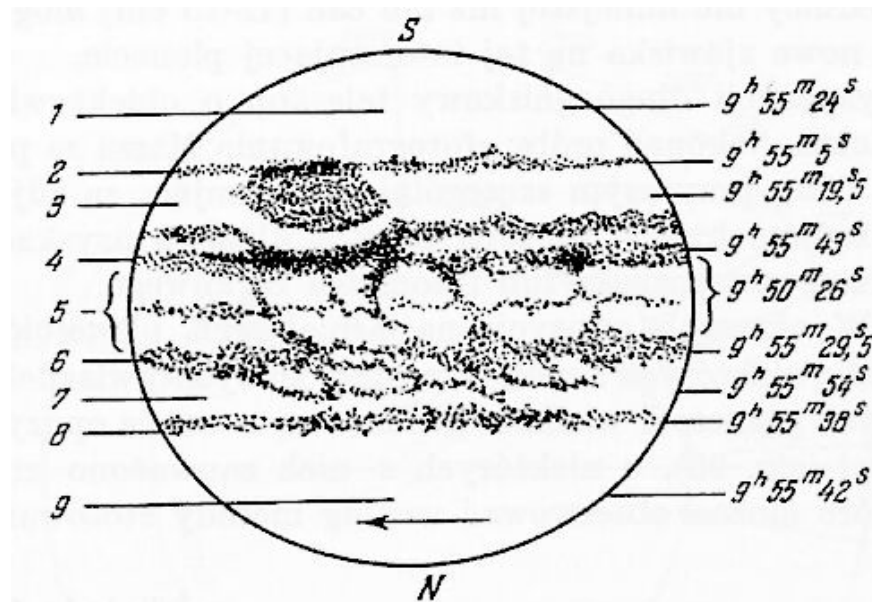


O obrotach ciał niebieskich

© Marek Bromirski 2003

Wprowadzenie

Dysponując kilkoma zdjęciami, na których daje się zidentyfikować te same szczegóły powierzchni planety, można z łatwością wyznaczyć okres jej rotacji. Jeśli dodatkowo swoje działania zdecydujemy się rozpocząć od Jowisza, to znajdziemy się na szlaku, którym czas jakiś temu podążał Giovanni Domenico Cassini. To on jako pierwszy znalazł poszukiwaną wartość stwierdzając, że największa planeta naszego Układu dokonuje pojedynczego obrotu w zdumiewająco krótkim czasie 9 godzin i 56 minut. Wkrótce okazało się, że sprawa jest nieco bardziej skomplikowana, bowiem szybkość rotacji zmienia się wraz z oddaleniem od równika. Własność tą ilustruje schemat przedstawiony na rysunku:



Rys. 1. Okresy rotacji pasm na powierzchni Jowisza

Choć rozważany problem został już dawno rozwiązany, warto o tym na chwilę zapomnieć, by przystąpić do realizacji przedstawionych dalej działań bez zbędnych obciążeń. Podejście to posiada znaczny walor dydaktyczny, o czym mogą się przekonać zaliczający dowolne ćwiczenia laboratoryjne.

Pomiary

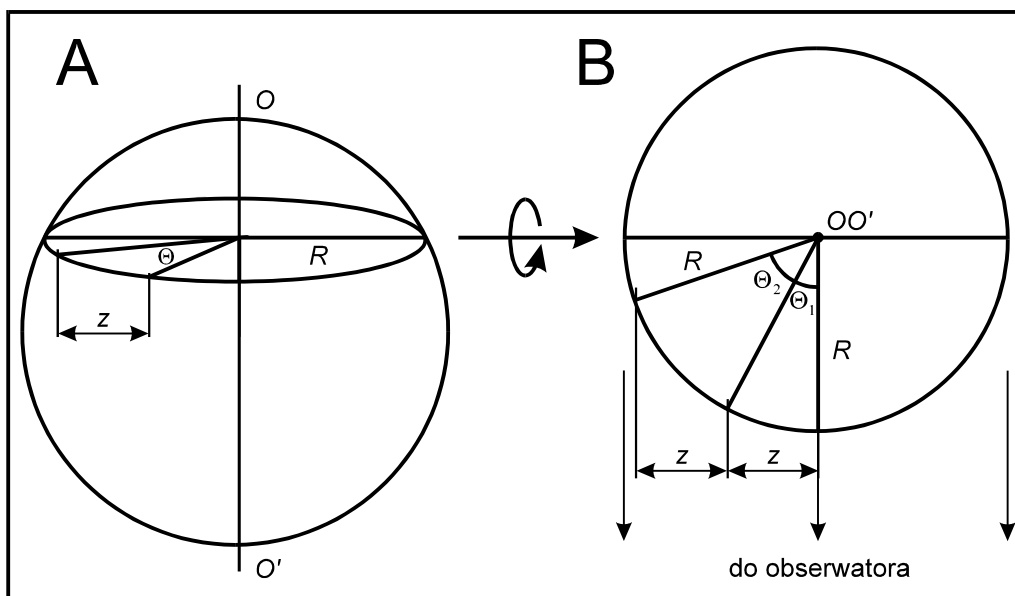
Podstawowy materiał informacyjny umożliwiający prowadzenie dalszych działań stanowią zdjęcia, które można wykonać samodzielnie lub wykorzystać pliki stanowiące załącznik do opracowania. Fotografie, których czas wykonania powinien być określony z dokładnością do 1 minuty, nie muszą być nadzwyczajnej jakości – wystarczy, że pod względem ostrości odwzorowania są porównywalne z przedstawioną poniżej:



Rys. 2. Jowisz

Proponowana technika wyznaczania okresu rotacji wymaga dysponowania dwoma ujęciami wykonanymi w odstępie ok. 1.5 ÷ 2 godzin. Z powodów, które zostaną przedstawione w dalszej części rozważań celowe jest również wykonanie trzeciej fotografii kilka dni po pierwszej sesji zdjęciowej. We wszystkich przypadkach warto wstępnie zorientować pole widzenia tak, by równik planety posiadał orientację poziomą, co pozwoli uniknąć programowego obracania obrazu.

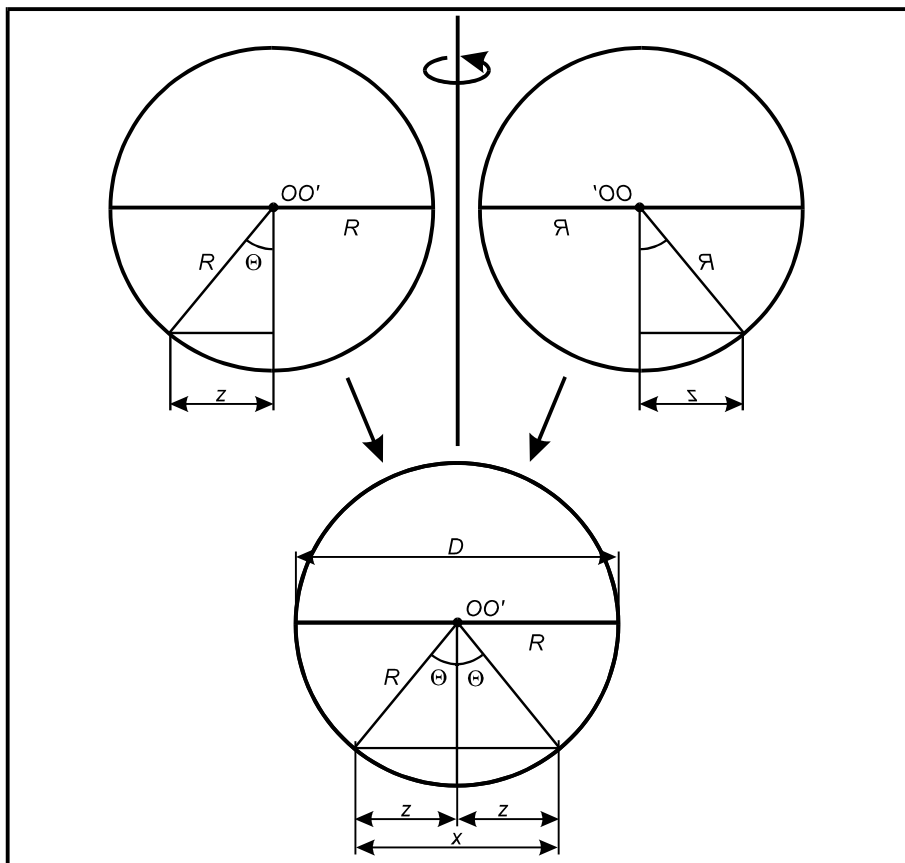
Po zgromadzeniu niezbędnych materiałów można przystąpić do ich interpretacji, co wymaga elementarnych obliczeń. Wzajemną konfigurację obserwatora i planety przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Schemat obliczeniowy

W pierwszej fazie niezbędne jest zgrubne oszacowanie kątovej prędkości obrotu planety. Ponieważ czas przemieszczania się wybranego fragmentu powierzchni widocznego na obydwu fotografiach jest równy odstępowi, w którym wykonano zdjęcia, pozostaje ustalenie kąta θ . Wartości tej nie można zmierzyć bezpośrednio, stąd trzeba ją wyznaczyć drogą obliczeniową.

Wielkością w sposób naturalny związaną z kątem θ jest odcinek z , jednak relacja ta nie jest jednoznaczna, co uzasadnia schemat B, stanowiący rzut pionowy części A. Mimo że kąty θ_1 i θ_2 różnią się w sposób wyraźnie widoczny, związane z nimi długości z są identyczne. Poprawnym rozwiązaniem jest niezależne wyznaczenie kątowych odległości każdego z zarejestrowanych położeń od osi symetrii obrazu planety, a następnie ich odjęcie. Jednakże i ten schemat, choć formalnie prawidłowy, jest niedoskonały bowiem dostarcza rezultatów obarczonych dużą niepewnością. Jej przyczyną jest zwłaszcza trudność precyzyjnego wyznaczenia położenia osi OO' przechodzącej przez obydwie bieguny planety. Na szczęście problem ten posiada relatywnie proste rozwiązanie, przedstawione schematycznie na rys. 4.



Rys. 4. Schemat obliczeniowy

Kopia obrazu zostaje poddana operacji zwierciadlanego odbicia i nałożeniu na fotografię pierwotną, tak aby kontury zewnętrzne planety z obydwu ujęć pokryły się w sposób możliwie idealny. Działanie to łatwo przeprowadzić wykorzystując możliwości dowolnego, bardziej zaawansowanego edytora w rodzaju Corel PhotoPaint lub Photoshop. W omawianym przypadku zachodzi kolejno:

$$\sin \Theta = \frac{z}{R} = \frac{2z}{2R} = \frac{x}{D} \Rightarrow \Theta = \arcsin \frac{x}{D} \quad (1)$$

zaś w wyznaczeniu położenia osi OO' staje się zbędne.

W praktyce warto wstępnie zaczernić obszar, w którym po złożeniu obydwu obrazów wystąpi punkt odniesienia, co skutecznie zapobiegnie jego maskowaniu przez nieistotne szczegóły drugiego obrazu:

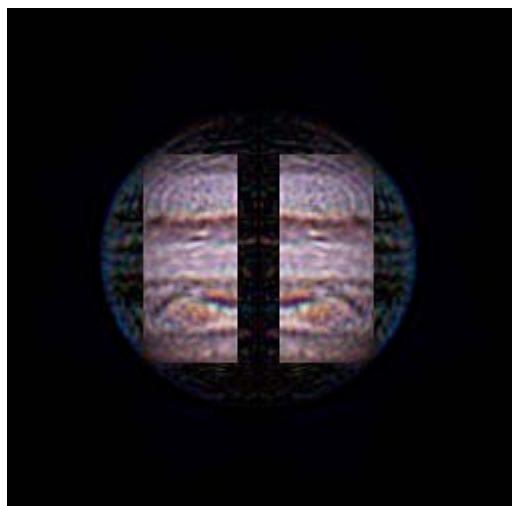


Obraz pierwotny

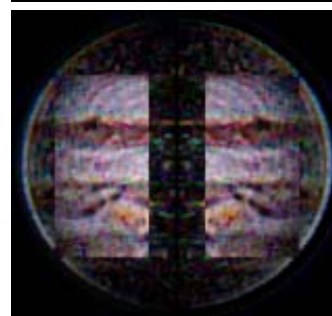
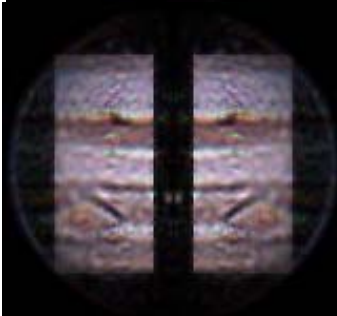
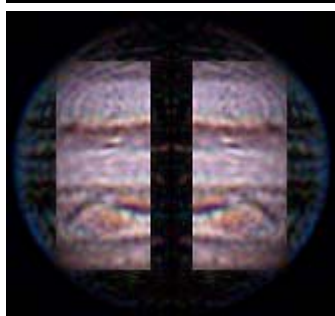
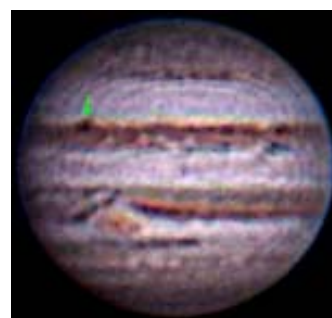


Symetryczna kopia

Teraz wystarczy przeprowadzić operację nakładania:



i powtórzyć ją dla każdej z posiadanych fotografii:



A $t_A = 25$ luty 2003, godz. 18:15

B $t_B = 25$ luty 2003, godz. 19:55

C $t_C = 27$ luty 2003, godz. 20:10

Choć pomiarów x i D można dokonać linijką lub suwmiarką wprost na ekranie (używając maksymalnego powiększenia), znacznie lepiej wykorzystać odczyt położenia kursora podawany w pikselach przez używany program edycyjny. W ten sposób znacznie redukuje się niepewność i nadaje rezultatom walor powtarzalności. Wyniki otrzymane dla zaznaczonych punktów przy użyciu zależności (1) zestawiono w tabeli:

Tabela 1.

	A		B		C	
	[mm]	[piksele]	[mm]	[piksele]	[mm]	[piksele]
D	243	151	238	151	223	148
x	153	96	91	56	121	74
θ [rad]	0.68	0.69	0.39	0.38	0.57	0.52
θ [°]	39.02	39.48	22.48	21.77	32.86	30.00

Wyznaczenie niezbędnych miar kątowych pozwala na przystąpienie do zasadniczej części obliczeń.

Obliczenia

Wstępne oszacowanie kątowej prędkości obrotu planety umożliwia zależność:

$$\omega' = \frac{\Theta_A + \Theta_B}{t_B - t_A},$$

gdzie Θ_A i Θ_B są kątowymi odległościami obserwowanego punktu od osi biegunowej w chwilach odpowiednio t_A i t_B . Znajomość ω' pozwala z kolei na wyznaczenie okresu obrotu T' zgodnie z formułą:

$$T' = \frac{\Theta_0}{\omega'},$$

w której Θ_0 stanowi miarę kąta pełnego (360° lub 2π radianów). Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy ostatecznie:

$T_l' = 9 \text{ godz. } 45 \text{ min. } 20 \text{ s}$ dla pomiarów dokonywanych linijką oraz

$T_p' = 9 \text{ godz. } 47 \text{ min. } 48 \text{ s}$ przy użyciu odczytów w pikselach.

Wyniki uzyskane w tej fazie obliczeń są obarczone niezależnie od używanej metody pomiarowej znaczną niepewnością. Składają się na to następujące przyczyny:

1. Efekt małej skali odwzorowania:

Rzeczywista średnica równikowa Jowisza jest równa ok. 142 300 km, natomiast na obrazie powiększonym w stopniu, który pozwala jeszcze rozróżniać szczegóły wynosi ok. 25 cm. Podziałka odwzorowania wynosi zatem:

$$\approx \frac{1}{569\,200\,000}.$$

Obraz Ziemi w takiej skali posiadałaby średnicę równikową ok. 2.2 cm, tj. taką, jak wysokość widocznej na zdjęciach Wielkiej Czerwonej Plamy. W tych warunkach nawet relatywnie duży i silnie kontrastowy fragment powierzchni nie może być zidentyfikowany z wysoką precyzją ponieważ na kolejnych zdjęciach jego kształt będzie odwzorowany w odmienny sposób.

2. Niska rozdzielczość obrazu:

W celu jej oszacowania wystarczy zauważyć, że najmniejszy mierzalny na obrazie odcinek posiada długość jednego piksela ($\delta x = 1 \text{ piksel}$). I tak np. w rozważanym przypadku horyzontalna rozciągłość obrazu Jowisza wynosi $D = 150$ pikseli, stąd każdy z nich odwzorowuje obszar o rozmiarach ok. $930 \times 930 \text{ km}$ ($\delta x \approx 1000 \text{ km}$).

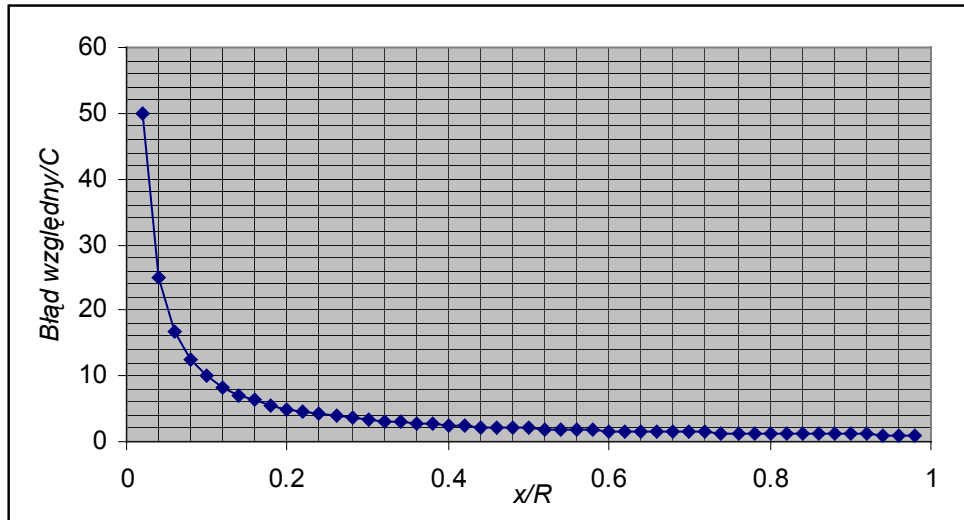
W celu uzyskania ogólnej zależności warto posłużyć się normującą zmienną $z = x/R$, co pozwala zapisać wyrażenie na błąd względny ε odległości punktów pomiarowych jako:

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta x}{R} \frac{1}{z}.$$

Można zauważyć, że w przypadku serii zdjęć wykonanej w trakcie konkretnej sesji parametr $C = \delta x/R$ przyjmuje stałą wartość ($\delta x = 1 \text{ piksel} \Rightarrow C = 1/R$). Stanowi on współczynnik odwrotnej proporcjonalności w formule:

$$\varepsilon = \frac{C}{z},$$

wiążącej błąd względny z wartością z w sposób przedstawiony graficznie na rysunku:

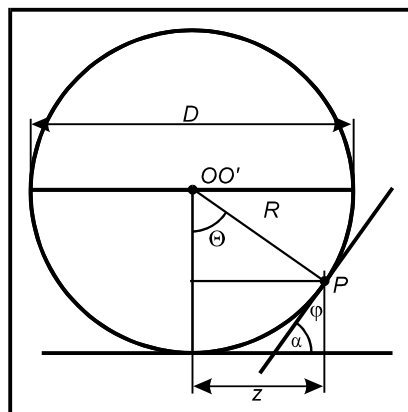


Rys. 5. Przebieg zmienności $\varepsilon/C = f(z)$

Łatwo zauważyć, że znaczenie efektu pikselizacji jest tym mniejsze im dłuższy jest odcinek pomiarowy, co preferuje wybór szczegółów położonych możliwie daleko od osi biegunowej OO' .

3. Efekt kąta obserwacji:

W miarę jak wybrany fragment powierzchni przesuwa się w stronę krawędzi planety, jest widoczny pod coraz mniejszym kątem φ (rys. 6). Powoduje to horyzontalną kompresję jego długości i w efekcie zmniejszenie precyzji określenia pozycji.



Rys. 6.

Wartość φ spełnia zależność:

$$\varphi = 90^\circ - \alpha,$$

gdzie α jest kątem, którego tangens stanowi współczynnik kierunkowy stycznej do powierzchni planety w punkcie P . Efekt kompresji brzegowych fragmentów obrazu powiększa niepewność wynikającą z pikselizacji w stopniu proporcjonalnym do wartości $\operatorname{tg} \alpha$ danej zależnością:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

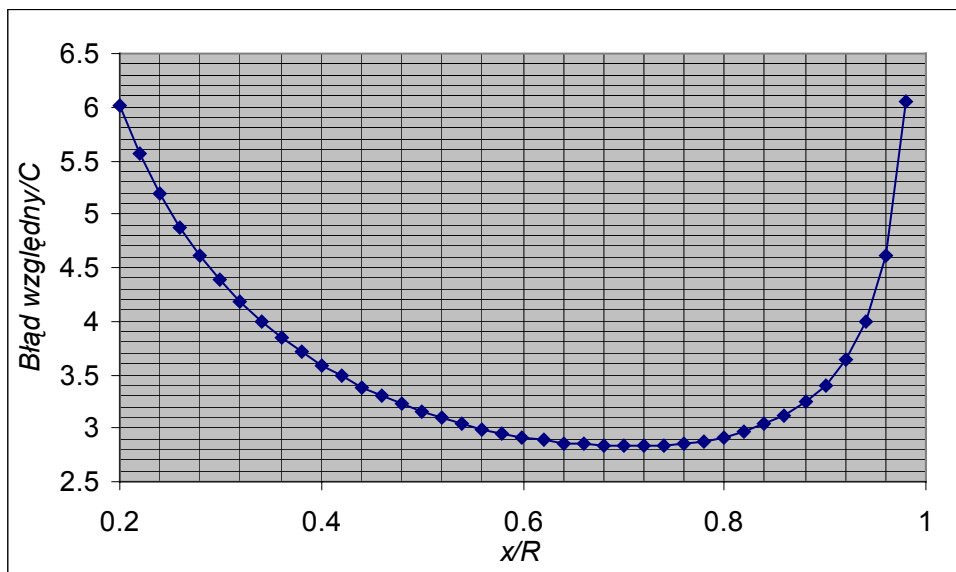
co zapisujemy formalnie:

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right).$$

Po unormowaniu ostatnia zależność przyjmuje postać:

$$\varepsilon' = \frac{C}{z} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \right), \quad (2)$$

w której ponownie $z = x/R$. Zmiany poprawionego względnego błędu pomiarowego ε' w funkcji z przedstawiono na rysunku:



Rys. x. Przebieg zmienności $\varepsilon'/C = f(z)$

Analiza wykresu prowadzi do wniosku, że błąd pomiaru przyjmuje minimalną wartość $\varepsilon' \approx 2.83C$, gdy $x \approx 0.7R$. Ponieważ w rozważanym przypadku $R \approx 75$ pikseli, stąd $C = 1/R \approx 0.013$ i ostatecznie $\varepsilon' \approx 0.04 = 4\%$.

Rzeczywiste wartości błędów względnych dla każdej z używanych metod pomiarowych można wyznaczyć z zależności:

$$\varepsilon_r = \frac{T - T_p}{T},$$

w której T jest wartością „prawdziwą” natomiast T_p uzyskaną na podstawie pomiarów. Z rysunku 1 wynika, że $T = 9 \text{ godz. } 55 \text{ min. } 38 \text{ s} = 595.6 \text{ min}$, natomiast wartości obliczone są równe $T_l' = 9 \text{ godz. } 45 \text{ min. } 20 \text{ s} = 585.3 \text{ min}$ oraz $T_p' = 9 \text{ godz. } 47 \text{ min. } 48 \text{ s} = 587.8 \text{ min}$. W wyniku niezbyt skomplikowanych obliczeń otrzymujemy kolejno:

$\varepsilon_l' = 2\%$ dla pomiarów dokonywanych linijką oraz

$\varepsilon_p' = 1\%$ przy użyciu odczytów w pikselach.

Choć otrzymane wartości, zwłaszcza uwzględniając wykorzystane środki, są satysfakcjonujące, daleko im do precyzji określanej mianem „astronomicznej”. Na szczęście istnieje relatywnie prosta metoda zwiększenia dokładności, ponieważ rotacja Jowisza, podobnie zresztą jak każdej innej planety, jest zjawiskiem okresowym. Dysponując okresem jego powtarzania T' oszacowanym z dokładnością rzędu 1% można powtórzyć procedurę pomiarową wykorzystując kolejną fotografię wykonaną w kilka dni po pierwszej sesji zdjęciowej. Znajomość odstępu pomiędzy kolejnymi rejestracjami Δt umożliwia obliczenie całkowitej liczby obrotów n z prostej zależności:

$$n = \frac{\Delta t}{T'}.$$

W rozważanym przypadku, przesunięcie pomiędzy chwilami $t_A = 25$ luty 2003, godz. 18:15 i $t_C = 27$ luty 2003, godz. 20:10 wynosi $\Delta t = 2995 \text{ min}$. Zależnie od metody pomiarowej szacujemy, że w tym czasie nastąpiło:

$$n_l = \frac{\Delta t}{T_l'} = \frac{2995}{585.3} \approx 5.12 \quad \text{lub} \quad n_p = \frac{\Delta t}{T_p'} = \frac{2995}{587.8} \approx 5.10 \text{ obrotów planety.}$$

Ułamkowa część obydwu wyników jest nieznacząca bowiem kumuluje wszystkie niedokładności pierwotnych oszacowań. Jej wyznaczenie musi zatem nastąpić przy użyciu przedstawionych wcześniej metod geometrycznych.

Z rezultatów zestawionych w Tab.1 wynika, że w chwili t_A kątowa odległość wybranego fragmentu od osi OO' wynosiła $\Theta_{Al} = 39.02^\circ$ (pomiar „linijkowy”) lub $\Theta_{Ap} = 39.48^\circ$ (konwencja pikselowa), natomiast w momencie t_C wartości te wynoszą odpowiednio $\Theta_{Cl} = 32.86^\circ$ albo $\Theta_{Cp} = 30.00^\circ$. Obydwa położenia pomiarowe znajdują się po tej samej „lewej” stronie osi OO' , a w kierunku obrotu planety $\Theta_C > \Theta_A$ (!!!), stąd ostateczną wartość kątowej prędkości jej rotacji opisuje zależność:

$$\omega = \frac{5 \times 360^\circ + \Theta_A - \Theta_C}{t_A - t_C},$$

Znajomość ω pozwala na wyznaczenie okresu obrotu T zgodnie z używaną wcześniej formułą:

$$T = \frac{\Theta_0}{\omega},$$

w której Θ_0 stanowi miarę kąta pełnego (360° lub 2π radianów). Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$T_l = 9 \text{ godz. } 56 \text{ min. } 57 \text{ s dla pomiarów dokonywanych linijką oraz}$$

$$T_p = 9 \text{ godz. } 55 \text{ min. } 51 \text{ s przy użyciu odczytów w pikselach.}$$

Uwzględniając zapis obliczonych wartości w postaci $T_l = 596.9 \text{ min}$ oraz $T_p = 595.8 \text{ min}$ i wykorzystując ponownie zależność:

$$\varepsilon_r = \frac{T - T_p}{T},$$

w której wartość $T = 9 \text{ godz. } 55 \text{ min. } 38 \text{ s} = 595.6 \text{ min}$ otrzymujemy, że błędy wyznaczonych wartości wynoszą odpowiednio:

$$\varepsilon_l = 2.18 \times 10^{-3} \text{ oraz } \varepsilon_p = 3.36 \times 10^{-4}.$$

Wyniki te nie wymagają komentarza.

Podsumowanie

Na podstawie dotychczasowych rozważań możliwe jest sformułowanie następujących wniosków:

Przedstawiona technika wyznaczania okresów rotacji pozwala na ich estymację z profesjonalną dokładnością. Szczególne znaczenie dla ostatecznej jakości uzyskiwanych rezultatów posiada przy tym zaproponowana metoda obróbki materiałów zdjęciowych umożliwiająca znaczącą redukcję niepewności wyznaczania danych wejściowych.

Choć w teorii można rozważać wykorzystanie znacznie większych odstępów pomiędzy kolejnymi rejestracjami, celowość podejmowania podobnych działań jest z wielu powodów problematyczna. Samodzielne sporządzenie ich listy będzie z pewnością wysoce pouczającym ćwiczeniem praktycznym.

Jeśli mimo wszystko zależy nam na dalszym zwiększaniu dokładności, zalecanym podejściem jest rejestrowanie większej liczby (np. trzech) ujęć w trakcie każdej sesji, a następnie niezależne przeprowadzenie odpowiedniej ilości wyliczeń i uśrednienie otrzymanych wyników.

Na koniec warto zauważyć, że oprócz Jowisza istnieje przynajmniej jeszcze jedna planeta, której okres rotacji można wyznaczyć dysponując przeciętnymi możliwościami technicznymi. Szanse na potwierdzenie tej tezy pojawią się już niebawem, bo pod koniec nadchodzącego lata.